

Derivações de algumas passagens do Hoffman

Passagem (4.12) $\rightarrow$ (4.14)

Temos da (4.12), a entropia da distribuição de renda será:

$$H(y) = \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{1}{y_i}$$

O $H(y)$ máximo, ou seja, a entropia máxima, ocorre quando há um máximo de incerteza a respeito do que pode ocorrer, visto que entropia é a esperança do conteúdo informativo para uma distribuição. Este máximo ocorre quando todos os possíveis eventos são igualmente prováveis, e você não deriva nenhuma informação destes eventos equi-prováveis. Então para renda teríamos $y_i = 1/n$. E assim, teríamos:

$$H(y)_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log n = \log n$$

Assim, entropia aqui, relacionada a medidas de desigualdade, seria igualdade, e seu valor máximo seria perfeita igualdade. Note que obtemos o valor mínimo quando $y_i \rightarrow 0$, e $H(y)$

mínimo será 0, pois $\lim_{y_i \rightarrow 0} y_i \log \frac{1}{y_i} = -\lim_{y_i \rightarrow 0} y_i \log y_i = 0$

Logo, temos que: $0 \leq H(y) \leq \log n$. Assim, Theil (1967) propôs uma medida de desigualdade a partir da entropia da distribuição, subtraindo esta entropia do valor máximo. Logo temos:

$$T = \log n - H(y) = \log n - \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{1}{y_i} = \log n + \sum_{i=1}^n y_i \log y_i = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \log n + \sum_{i=1}^n y_i \log y_i,$$

não altera nada pois o termo entre parênteses é 1, que é a soma das frações da renda total. Assim, chegamos a (4.14):

$$T = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \log n + \sum_{i=1}^n y_i \log y_i = \sum_{i=1}^n y_i [\log n + \log y_i] = \sum_{i=1}^n y_i \log n y_i, \text{ tal que } 0 \leq T \leq \log n$$