

Derivações de algumas passagens do Deaton

Passagem (3.4a) $\rightarrow$ (3.6a)

Considerando a função de Bem Estar de Sen $W = V(x_1, \dots, x_N) = \mu V\left(\frac{x_1}{\mu}, \dots, \frac{x_N}{\mu}\right) \mu(1-I)$, onde utilizei a hipótese de homogeneidade de grau um (HG1) da função V, para que a variação % em todos os x 's tenha o mesmo efeito proporcional no agregado. Seja a função de bem estar social aditiva (Atkinson):

$$W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}, \varepsilon \neq 1 \quad (3.4a)$$

Verifiquemos se esta função é HG1:

$$W(\lambda x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\lambda x_i)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} = \lambda^{1-\varepsilon} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} = \lambda^{1-\varepsilon} W(x)$$

Assim, para que W seja HG1, temos que elevá-la a $1/(1-\varepsilon)$. Assim, teríamos:]

$$W^*(\lambda x) = [W(\lambda x)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = [\lambda^{1-\varepsilon} W(x)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \lambda [W(x)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \lambda W^*(x)$$

Logo utilizando $I = 1 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i / \mu)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ teremos uma medida de desigualdade associada a esta $W^*(x)$. Verificando HG1 usando esta I através da fórmula de Sen:

$$W^*(\lambda x) = \mu \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\lambda x_i / \mu)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \mu \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda^{1-\varepsilon} (x_i / \mu)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \mu \left[\frac{\lambda^{1-\varepsilon}}{\mu^{1-\varepsilon}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \lambda \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \lambda W^*(x)$$

Assim, a medida de desigualdade é $I = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \varepsilon \neq 1$ (3.6a).

Para $\varepsilon = 1$, a resolução é direta. Seja:

$$\ln W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i = \frac{1}{N} \ln \prod_{i=1}^N x_i = \ln \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}}, \varepsilon = 1 \quad (3.4b)$$

$$W = \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}}$$

Como esta função é HG1, podemos propor diretamente a medida de desigualdade:

$$I = 1 - \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}} \quad (3.6b)$$

Verificando HG1 através da função de Sen:

$$W(\lambda x) = \mu \left(\prod_{i=1}^N \lambda x_i / \mu \right)^{\frac{1}{N}} = \lambda^{N/N} \mu \frac{1}{\mu^{N/N}} \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}} = \lambda W(x)$$