

A Decisão de Consumo/Poupança sob Incerteza

Ref: Blanchard and Fischer (1989), seção 6.2

$$\text{Max } E \left[\sum_{t=0}^{T-1} (1+q)^{-t} U(C_t) / 0 \right] \quad (1)$$

A equação (1) representa o valor presente descontado da utilidade esperada condicionado à informação disponível em $t=0$.

OBS: As fontes de incerteza são a renda do trabalho futura e o retorno dos ativos.

$$\begin{aligned} \text{Sujeito à: } A_{t+1} &= (A_t + Y_t - C_t) [(1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t)] \\ Y_t &\in I_t, A_t \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Onde $[(1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t)]$ é a taxa de retorno do portfólio.

A programação dinâmica transforma problema de T períodos num de 2 períodos.

$$V_t(A_t) = \text{Max} E \left[\sum_{s=t}^{T-1} (1+q)^{-(s-t)} U(C_s) / t \right] \quad (3),$$

a “Value Function” corresponde o valor presente da utilidade esperada ao longo do caminho ótimo.

$$V_t(A_t) = \text{Max}_{\{C_t, W_t\}} \{ U(C_t) + (1+q)^{-1} E[V_{t+1}(A_{t+1}) / t] \}, \text{ Equação de Bellman} \quad (4)$$

CNPO's (Usando (2))

$$\{C_t\}: U'(C_t) = E \left[(1+q)^{-1} ((1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t)) V'_{t+1}(A_{t+1}) / t \right]$$

$$\{W_t\}: E[V'_{t+1}(A_{t+1})(r_t - z_t) / t] = 0 \quad (\text{aqui usa-se } (1+q)^{-1}(A_t + Y_t - C_t) = \text{constante})$$

Usando um argumento de perturbação sobre A_t em ponto ótimo (4) e usando (2):

$$V'_t(A_t) = E \left[(1+q)^{-1} ((1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t)) V'_{t+1}(A_{t+1}) / t \right] = U'(C_t), \text{ esta última igualdade}$$

vem da primeira CNPO

Esta condição de envelope nos diz que o valor marginal da riqueza financeira equivale à utilidade marginal do consumo ao longo do caminho ótimo.

Eliminando $V_{t+1}(A_{t+1})$ da CNPO:

$$U'(C_t) = E[(1+q)^{-1}((1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t))U'(C_{t+1})/t] \quad (5)$$

$$E[U'(C_{t+1})(1+r_t)/t] = E[U'(C_{t+1})(1+z_t)/t] \quad (6)$$

Fazendo (6) em (5) transformamos as CNPO em:

$$U'(C_t) = (1+q)^{-1}(1+r_t)E[U'(C_{t+1})/t] \quad (5')$$

$$U'(C_t) = (1+q)^{-1}E[(1+Z_t)U'(C_{t+1})/t] \quad (5'')$$

A equação (5') corresponde à chamada equação de Euler; (5'') ex-post corresponde a:

$$\left(\frac{1+r_t}{1+q}\right)U'(C_{t+1}) = U'(C_t) + \bar{e}_{t+1}; \quad E[\bar{e}_{t+1}/t] = 0$$

O Caso da Renda do Trabalho Diversificável¹ e Utilidade da Classe Hara²

Hipóteses:

¹Logo toda a riqueza (financeira + capital humano) é transacionável no mercado (Y_t vai para dentro de A_t).

² Hyperbolic absolute risk aversion – Value function e função utilidade possuem a mesma forma funcional (muito conveniente).

Trabalhando com um tipo específico de função utilidade da classe Hara:

CRRA $U(C) = \frac{C^{1-n}}{1-n}$ para $n > 0, n \neq 1$?

$$U(C) = \ln C \text{ para } n = 1, \text{ (ver B-F, pág.44)}$$

$$\text{Se } n = 1 \rightarrow U(C) = \ln C \text{ e } V(A_t) = a \ln(A_t) + b$$

Então o problema de programação dinâmica corresponde à equação de Bellman abaixo sujeita à restrição orçamentária.

$$\text{Max} \ln(C_t) + (1+q)^{-1} E_t[a \ln(A_{t+1}) + b]$$

$$\text{s.a. } A_{t+1} = [A_t - C_t][(1+r)w_t + (1+z_t)(1-w_t)]$$

CNPO:

$$* \{C_t\} \frac{1}{C_t} = \frac{(1+q)^{-1} a((1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t))}{(A_t - C_t)((1+r_t)w_t + (1+z_t)(1-w_t))} \rightarrow C_t = \frac{A_t}{1 + \frac{a}{1+q}}$$

Usando o teorema do envelope obtemos:

$$V'(A_t) = U'(C_t) \rightarrow \frac{a}{A_t} = \frac{1}{C_t} \rightarrow a = \frac{A_t}{C_t}$$

substituindo a em *:

$C_t = \left(\frac{q}{1+q} \right) A_t$; ou seja o consumo é uma função linear da renda neste caso e renda futura e taxa de juros só afetam o consumo via riqueza.

Outros exemplos clássicos: Renda Corrente (Keynes)
Ciclo da Vida (Modigliani)
Renda Permanente (Friedman)

A) Modelo Hall-Flavin (conhecido como a versão moderna da PIH)

HIP's: a) Utilidade quadrática e aditiva; b) Taxas de juros única, previsível e constante ao nível da taxa de preferência no tempo ($r = \theta$); c) Horizonte infinito e expectativas racionais

$$\text{Max} E_t \sum_{i=0}^{\infty} (1+q)^{-i} \left(a C_{t+i} - \frac{b}{2} C_{t+i}^2 \right)$$

$$\text{s.a. } A_{t+1} = (1+r)(A_t + Y_t - C_t)$$

$$\text{CNPO(Geral): } U'(C_t) = E_t \frac{1+r}{1+q} U'(C_{t+1})$$

Dados $r = \theta$ e utilidade quadrática: $C_t = E_t C_{t+1}$

Pela lei das expectativas iterativas:

$$E_t C_{t+2} = E_t(E_{t+1} C_{t+2}) = E_t(C_{t+1}) = C_t \text{ logo: } E_t C_{t+i} = C_t \text{ para } \forall i$$

Integrando a restrição orçamentária para frente:

$$A_t = C_t - Y_t + \frac{A_{t+1}}{(1+r)} = C_t - Y_t + \frac{C_{t+1} - Y_{t+1}}{1+r} + \frac{A_{t+2}}{(1+r)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(C_{t+i} - Y_{t+i})}{(1+r)^i}$$

onde $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{A_{t+i}}{(1+r)^i} = 0$, esta é a “Non-ponzi condition” que limita o volume de despesa à restrição orçamentária do agente.

Tirando expectativas:

$$A_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_t - E_t Y_{t+i}}{(1+r)^i} \text{ (onde usamos } E_t C_{t+i} = C_t \text{ acima)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^i} - E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Y_{t+i}}{(1+r)^i}$$

Calculando:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{t+i}}{(1+r)^i} = C_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} \text{ (da fórmula da soma de uma PG)} \Rightarrow C_t \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{C_t(1+r)}{r}$$

Então:

$$C_t = \left(\frac{r}{1+r} \right) A_t + \frac{r}{1+r} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^i Y_{t+i}$$

$$\left(\frac{r}{1+r} \right) A_t - \text{Renda do Capital}$$

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^i Y_{t+i} - \text{Capital Humano}$$

$$\frac{r}{(1+r)} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^i Y_{t+i} - \text{Renda Permanente do Capital Humano}$$

Outro resultado do modelo Hall-Flavin:

$$C_t - C_{t-1} = \left(\frac{r}{1+r} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^i (E_t - E_{t-1}) Y_{t+i}$$

$$(E_t - E_{t-1}) Y_{t+i} \Rightarrow q_i e_t$$

A mudança no consumo (ΔC_t) é devido a mudanças nas expectativas sobre a renda futura. Somente mudanças que não faziam parte do conjunto inicial ($t-1$) de informações dos agentes impactariam o consumo. Portanto, o poder preditivo de outras variáveis defasadas além do consumo defasado seria nulo. Esta proposição revolucionou toda a indústria de funções consumo existente até meados dos anos 70 (Hall (1978)): Mudanças no consumo

devem-se a inovações na renda do trabalho (earnings). A literatura posterior combina o arcabouço acima com modelos de séries temporais (e.g. ARIMA's, AR()'s, MA()'s) para renda do trabalho. Por exemplo, assumindo que o processo de renda seja um AR(1):

$Y_t = fY_{t-1} + e_t$; notação: $f(L) = 1 - fL$, onde L é o operador de defasagem

$$\text{Logo: } \Delta C_t = \frac{\left(\frac{r}{1+r}\right) e_t}{1 - \frac{f}{1+r}} = \frac{r}{1+r-f} e_t$$

Se $f < 1$ digamos um processo estacionário (pois $f < 1$ – o efeito dos choques e_t) eventualmente desaparecem (então $f < 1$) e o consumo seria mais suave que a renda do trabalho, como Friedman (1957) e Modigliani (1986) enfatizaram. Entretanto, se f tende a 1 então a renda do trabalho se torna um passeio aleatório (Random Walk) e a propensão a consumir da renda seria unitária. Entretanto, se $f > 1$ o consumo deve reagir mais de um para um em relação ao trabalho. Dada a existência de choques permanentes sobre a renda do trabalho, o consumo parece muito suave em relação a choques na renda. Isto constitui o “excess smoothness puzzle” de Deaton (1986) e Deaton e Campbell (1989). Outro “puzzle” levantado pelos testes de ortogonalidade de Hall (1978) e Flavin (1981) seria a sensibilidade do consumo em relação a mudanças esperadas da renda (excess sensitivity puzzle).