Gabarito da Lista 2 de Políticas Sociais - Pobreza

4 de abril de 2012

Questão 1.1 Numa pesquisa amostral em que a proporção de pobres (P^0) é 30% e o tamanho da amostra é de 25.000 famílias de tamanho médio de 4 pessoas. Calcule o intervalo de confiança a 95% do P^0.

Resolução Considere uma amostra de tamanho n de uma uma variável aleatória X, com média μ e variância σ^2. Temos então que

$$P\left(X - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < X + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Como P^0 está entre 0 e 1, pode ser interpretada como uma probabilidade, e a distribuição de pessoas abaixo da linha de pobreza pode ser vista como uma distribuição de Bernoulli. Neste caso a população é de $n = 4 \cdot 25000 = 100000$ pessoas. A média da distribuição Bernoulli é a probabilidade de sucesso, isto é, $\mu = P^0$, e a variância é $\sigma^2 = P^0(1 - P^0)$. Assim, o intervalo de confiança é de [0.2972,0.3028].

Questão 1.2 Digamos que esta sociedade esteja dividida apenas em dois grupos X e Z, com respectivamente 10.000 e 15.000 famílias cada um com tamanho médio idêntico. Se o P^0 de X equivale a 30% qual seria o maior tamanho do P^0 de Z de forma que a hipótese "P^0 de X = P^0 de Z"não pudesse ser rejeitada.

Questão 1.3 Agora se o Hiato Quadrático médio de Pobreza (P^2) Total e para o grupo X coincidem em 10% qual é o P^2 do Grupo Z e a sua contribuição relativa para o P^2 total?

Resolução O P^2 pode ser decomposto da seguinte forma

$$P^2 = \frac{n_x}{n} P_x^2 + \frac{n_z}{n} P_z^2$$

onde P_x^2 e P_z^2 são os P^2 de X e Z, respectivamente. Temos que $n_x = 10000 \cdot 4 = 40000$ e, portanto, $n_z = 60000$. Assim, o P_z^2 total é

$$\begin{aligned} P^2 &= 0.4 \cdot P_x^2 + 0.6 \cdot P_z^2 \\ 0.1 &= 0.4 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot P_z^2 \\ P_z^2 &= 0.1 \end{aligned}$$

E sua contribuição para o total é $\frac{n_z}{n} P_z^2 / P^2 = 0.6$.

Questão 1.4 Explique em três passos como imputar aluguel às rendas para o cálculo de indicadores sociais.

Resolução A imputação do alugel as rendas pode ser feita da seguinte forma

- A partir de pesquisas domiciliares e usando somente aqueles domicílios para os quais temos os dados de aluguéis, estimamos uma regressão, na qual a variável dependente são os aluguéis e as variáveis independentes consistem em características do imóvel (localização, número de quartos e banheiros, etc) e do inquilino.
- Obtidos os coeficientes, realizamos as previsões dos aluguéis para aqueles domicílios com casa própria.
- Recalculamos a renda dos domicílios com casa própria, somando renda de todas as fontes e os aluguéis imputados.

Questão 1.5 Como incorporar a possibilidade de existência de diferentes graus de economias de escala pelo tamanho dos domicílios em medidas de bem estar social?

Resolução Podemos utilizar um conceito de renda como em

$$y_{ij} = \frac{Y_{ij}}{I_j n_i^{\theta}}$$

onde $\theta \in [0,1]$ mede o grau de economia de escala, I_j é um deflator para a área j e Y_{ij} é a renda total do domicílio i na área j. Note que quanto menor for θ, maior será a economia de escala.

Questão 1.6 Verdadeiro ou Falso? O Indicador de pobreza conhecido como o Hiato médio de Pobreza (P^1) é superior ao indicador relativo a proporção de pobres (P^0) no desenho de um sistema de metas sociais pois prioriza o mais pobre dos pobres.

Resolução Falso, o indicador que, quando utilizado, prioriza o mais pobre dos pobres é o P^2. O P^0 prioriza o menos pobre dos pobres, enquanto o P^1 é insensível é severidade da miséria.

Questão 1.7 Escreva a fórmula e discuta as possíveis contra-indicações dos seguintes indicadores:

- Índice de Pobreza de Sen
- Decomposição do efeito sobre a Pobreza na desigualdade segundo Datt-Ravallion (média e desigualdade)
- Contribuição no perfil de pobreza do grupo j da categoria i para o P^2

Resolução

- $P_{Sen} = P^0 \delta^p + P^1 (1 - \delta^p)$, onde δ^p é o Índice de Gini dos pobres. É uma medida que respeita a condição de Pigou-Dalton. Como é baseado no Gini, é não decomponível.
- Seja uma medida de pobreza P totalmente caracterizada em termos de uma linha de pobreza z, da renda média μ e da curva de Lorenz L representando as desigualdades relativas. Sua variação pode ser decomposta, segundo Datt-Ravaillon, da seguinte forma

$$P_{t+n} - P_t = G(t, t+n; r) + D(t, t+n; r) + R(t, t+n; r)$$

  nos quais os componentes de crescimento e redistributivo são dados por
  $G(t, t+n; r) \equiv P(z/\mu_{t+n}, L_r) - P(z/\mu_t, L_r)$ e $D(t, t+n; r) \equiv P(z/\mu_r; L_{t+n}) - P(z/\mu_r, L_t)$
  e R é um resíduo. Esta decomposição nos permite identificar quais são os fatores responsíveis por uma alteração em uma medida de pobreza. Por exemplo, dada uma redução da taxa de pobreza, é possível determinar em que medida o fenômeno se deu devido a um enriquecimento médio da população ou é redistribuição da riqueza já existente. Contudo, esta decomposição não é exata, como verificamos pela existência do resíduo R.
- Seja n_{ij} a população no grupo j da categoria i e P_{ij}^2 seu hiato quadrático médio de pobreza. Sejam ainda n pessoas na população total, com hiato quadrático médio P^2. Então, a contribuição do grupo j da categoria i para o P^2 é $\frac{n_{ij}}{n} P_{ij}^2 / P^2$. Uma política que tenha como foco um determinado grupo da população apenas por este apresentar uma elevada da taxa de pobreza, embora eficaz, pode acabar por produzir poucos efeitos sobre a taxa de pobreza total caso o tamanho deste grupo seja pequeno.

Questão 1.8 Como avaliar o impacto de um processo de crescimento balanceado sobre uma dada variação observada em duas medidas de pobreza?

Resolução Através da decomposição de Datt-Reveillon, o qual permite isolar o efeito do processo de crescimento balanceado de efeitos redistributivos.

Questão 1.9 Relacionar graficamente o conceito de dominância Estocástica de Segunda Ordem e os indicadores de pobreza da Família FGT (P^1, P^0 e P^2).

Resolução Sejam A e B distribuições quaisquer. Dizemos que A domina em 2^a ordem B se $P_A^1 > P_B^1$ para toda linha de pobreza z. Isto é equivalente a afirmar que a curva de déficit de pobreza de A situa-se acima da curva de B para todo z. Isto implica que, para $\alpha \geq 1$, $P_A^\alpha > P_B^\alpha$. Contudo, não é possível garantir que $P_A^0 > P_B^0$.

Questão 1.10 R\$14 por mês se refere ao valor mínimo mensal por brasileiro capaz de levar a renda de cada miserável até R\$79 (linha correspondente a uma taxa de pobreza de 33,3%).

- Qual seria o custo permanente de erradicação da miséria por brasileiro se a taxa de retorno do investimento social fosse 0,5% a.m.?
- Se o salário de cada não miserável fosse 7 reais por hora, a quantas horas semanais corresponderia sua contribuição?

Resolução

- O custo permanente equivale ao total de recursos que deve ser reunido em um único momento para que, quando aplicado é taxa de retorno do investimento social, seja capaz de financiar de as transferências necessárias para sempre, sem a necessidade de aportes adicionais. Podemos encontrar o custo permanente por brasileiro ao encontrar o valor presente das transferências por brasileiro, considerando como taxa de desconto a taxa de retorno do investimento social, ou seja

$$\begin{aligned} CP &= 14 + \frac{14}{1+r} + \frac{14}{(1+r)^2} + ... = \frac{14}{1-(1+r)^{-1}} \\ &= \frac{14}{\frac{1+r-1}{1+r}} = 14 \cdot \frac{1+r}{r} = 14 \cdot \frac{1.005}{0.005} = 2814 \end{aligned}$$

- Note que R\$14.00 por mês seria a contribuição de cada brasileiro, incluídos aí os miseráveis e não miseráveis. O que desejamos encontrar é a contribuição por não-miserável. Denotemos por C_{nm} a contribuição por não miserável, e por C_{tot} a contribuição por brasileiro. Sejam ainda N e Q os tamanhos das populações total e miserável, respectivamente. Assim, temos que

  $$C_{nm}(N-Q) = C_{tot}N$$

  isto é, o total arrecadado ao considerarmos contribuições de não-miseráveis deve coincidir com o total arrecada através de contribuições de todos os brasileiros. não sabemos os valores de N e Q especificamente, mas sabemos que $Q/N = 1/3$. E podemos reescrever a equação acima de forma a termos

  $$C_{nm} = C_{tot}\frac{N}{(N-Q)} = C_{tot}\frac{1}{\left(1-\frac{Q}{N}\right)}$$

  Portanto,

  $$C_{nm} = 14 \cdot \frac{1}{1-1/3} = 21$$

  A contribuição mensal de R\$21.00 corresponde a 3 horas do trabalho destes indivíduos, ou seja, o equivalente a 3/4 de hora semanal.

Questão 2.1 Discuta o papel do parâmetro θ na fórmula abaixo:

$$y_{ij} = \frac{Y_{ij}}{I_j n_i^\theta}$$

onde a família i vive na área j, n_i é o número de pessoas no domicílio i, Y_{ij} é o consumo total da família i na região j e I_j é o deflator para a área j.

Resolução O parâmetro θ captura o grau das economias de escala, sendo estas tão maiores quanto menor é θ. Consideremos o caso em que $I_j = 1$ para todo grupo j e $\theta = 1$. $y_{ij} = \frac{Y_{ij}}{n_i}$ Sendo assim, recaímos no caso do conceito de renda per capita, no qual estão ausentes retornos de escala. No outro extremo, podemos considerar $\theta = 0$, e então o conceito de renda empregado será o equivalente é renda domiciliar total.

Questão 2.2 Calcule, a partir dos dados abaixo, o mínimo custo mensal para o aliviamento completo de miséria por não miserável, considerando uma linha R$80 por mês.

População	Renda Domiciliar per Capita Mensal (R$)	P^0 (%)	P^1 (%)
180	270	30	20

Assumindo uma taxa de juros mensal de 1% a.m., qual seria o estoque de riqueza correspondente ao fluxo encontrado?

Resolução O P^0 nos informar a proporção de miseráveis, permitindo-nos encontrar o número de miseráveis Q na população total

$Q = P^0 = 0.3 \cdot 180 = 54$

O P^1 nos informa o custo de erradicação da miséria, medida como a proporção da linha de pobreza que deve ser contribuída por cada indivíduo da população total. Para uma linha de pobreza de R$80 e um P^1 de 0.20, temos que a contribuição por indivíduo é de $C_{tot} = 0.20 \cdot 80 = 16$.

Podemos encontrar a contribuição por não miserável necessária para a erradicação da miséria, sabendo que

$C_{nm} \cdot (N - Q) = C_{tot}$

ou seja, $C_{nm} = \frac{16}{180-54} \cdot 180 = 22.86$

O estoque de riqueza correspondente ao fluxo acima, considerando uma taxa de juros de 1%, ?

$\frac{22.86 \cdot (1+r)}{r} = \frac{22.86 \cdot 1.01}{0.01} = 2308.57$

Questão 2.4 Calcule todos os índices de Pobreza (P^0, P^1, P^2, P_{sen}) na amostra abaixo assumindo uma linha de pobreza igual a 3. $x = [1, 1, 2, 6, 30]$.

Resolução

- P^0: Temos 3 entre 5 indivíduos abaixo da linha de pobreza, resultando em um $P^0 = 60\%$.
- P^1: O custo total de erradicação da misária é de 2+2+1=5, correspondente a 5/3 da linha de pobreza. Dessa forma, a contribuição de cada um dos 5 indivíduos da amostra para a erradicação da miséria, e correspondente ao P^1, é de 1/3.
- P^2: Temos que
  $P^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{z-x_i}{z}\right)^2 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2^2+2^2+1^2}{9}\right) = \frac{1}{5}$
- P_{sen}: Temos que
  $P_{Sen} = P^0 \delta^P + P^1 \left(1 - \delta^P\right)$
  onde δ^P é o Gini dos pobres. Para calcular δ^P, devemos nos restringir a subamostra formada pelos pobres, isto é [1, 1, 2], com média igual a 4/3. Seu Gini pode ser calculado através de
  $\delta^P = \frac{2}{n^2\mu} \sum i x_i - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{9 \cdot (4/3)} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$
  Portanto,
  $P_{Sen} = 0.60 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = 0.38$

Questão 2.5 Repita 4 assumindo um processo de crescimento balanceado de 100

Resolução Agora a distribuição é [2, 2, 4, 12, 60].

- P^0: $P^0 = 2/5 = 40\%$.
- P^1: O custo total de erradicação da miséria é de 1+1=2, correspondente a 2/3 da linha de pobreza. Dessa forma, a contribuição de cada um dos 5 indivíduos da amostra para a erradicação da miséria, e correspondente ao P^1, é de 2/15.
- P^2: Temos que

  $P^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)^2 = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1^2+1^2}{9}\right) = \frac{2}{45}$
- P_{sen}: Agora a subamostra com as pessoas abaixo da linha da pobreza apresenta a distribuição [2, 2], com Gini igual a zero, uma vez que não há desigualdade. Portanto,

  $P_{Sen} = P^0 \cdot 0 + P^1 \cdot 1 = P^1 = 2/15$

Questão 2.6 Faça uma decomposição de Datt-Ravallion das mudanças da distribuição acima para a 0, 1, 2, 6, 30, definindo os componentes de desigualdade e de crescimento.

Resolução

Questão 2.7 Explicite as fórmulas e compare vantagens e desvantagens dos indicadores de desigualdade conhecidos como Hiato médio de Pobreza (P^1) e o índice de Sen (1976) de Pobreza. Quando os dois se equivalem?

Resolução A fórmula para o P^1 é

$P^1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)$

e a fórmula do índice de pobreza de Sen

$P_{Sen} = P^0\delta^P + P^1\left(1-\delta^P\right)$

O P^1 apresenta a propriedade de levar em conta a renda média dos pobres, distinguindo entre um pobre que está próximo e outro que está distante da linha de pobreza. O índice de pobreza de Sen corresponde é uma média ponderada entre P^0 e P^1, sendo os pesos constituídos pelo Gini da distribuição restrita àqueles abaixo da linha de pobreza.

Os dois índices se equivalem quando o Gini dos pobres é igual a zero, isto é, quando todos abaixo da linha de pobreza possuem a mesma renda.

Questão 3 Comente, concordando total, parcialmente ou não, justificando em três ou quatro linhas as seguintes proposições: (se possível apresente fórmula, gráfico ou modelo em forma capsular para ilustrar a sua resposta):

- Se a curva de severidade de pobreza (a integral da integral da CDF) da sociedade A está sempre acima daquela da sociedade B podemos assegurar que o indicador conhecido como a proporção de pobres (P^0) e o hiato médio de pobreza (P^1) são sempre maiores em A do que em B.
- O Indicador de pobreza conhecido como o Hiato médio de Pobreza (P^1) é superior ao indicador relativo a proporção de pobres (P^0) no desenho de um sistema de metas sociais pois prioriza o mais pobre dos pobres.
- Se adotarmos a meta social baseada no indicador de pobreza conhecido como Hiato médio de Pobreza (P^1) teremos implicitamente assumido que a prioridade é dada primeiro aos mais pobres dos pobres.

Resolução

- Falso. Dizer que a proporção de pobres (P^0) e o hiato médio de pobreza (P^1) são sempre maiores em A do que em B é equivalente a atestar a ocorrência de dominâncias de primeira e segunda ordens, respectivamente. Contudo, a dominância de terceira ordem (relacionada ao P^2) não implica nas demais.
- Falso. Ver resposta da Questão 1.6.
- Falso. Ver resposta da Questão 1.6.